



Středoškolská technika 2016

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

Řetězovka - řešení ideálního tvaru nosníku z hlediska minimalizace potenciální energie

Dušan König

Střední průmyslová škola strojnická a Střední odborná škola profesora Švejcara, Plzeň

Klatovská 109, Plzeň



**STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STROJNICKÁ A
STŘEDNÍ ODBORNÁ ŠKOLA PROFESORA ŠVEJCARA**

Plzeň, Klatovská 109

Řetězovka - řešení ideálního tvaru nosníku z hlediska minimalizace potenciální energie

Autor: Dušan König

Konzultanti: Ing. Josef Gruber, Ing. Zdeněk Němeček,

Doc. RNDr. František Ježek CSc.

Plzeň 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v seznamu vloženém v této práci.

Nemám závažný důvod proti zpřístupnění této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorských) v platném znění.

Poděkování

Velké díky si zaslouží pan **Ing. Zdeněk Němeček**. Děkuji za veškerou pomoc při pronikání do podstaty variačního počtu.

Dále děkuji panu **Doc. RNDr. Františkovi Ježkovi CSc.** za jeho rady, které vedly ke zkvalitnění práce.

Děkuji také panu **Ing. Josefovi Gruberovi** za jeho cenné postřehy a velmi ochotný přístup.

Anotace

Tato práce se zabývá řetězovkou. Vysvětluje, co to řetězovka je a jak ji můžeme aplikovat k řešení technických problémů. V práci jsou zahrnuty dva různé způsoby odvození rovnice řetězovky.

Výsledkem práce je program vytvořený v tabulkovém kalkulátoru. Tento nástroj je schopen na základě vstupních dat určit rovnici řetězovky pro konkrétní technický problém.

Klíčová slova: *řetězovka; tabulkový kalkulátor; variační počet; Euler-Lagrangeova rovnice; funkcionál*

Annotation

This work deals with catenary curve. The work explains what the catenary is and how we can use knowledge of the catenary to solve technical problems. The work includes two different ways how to deduce equation of the catenary.

The result of this project is a program, which can use input data to solve equation of catenary for specific technical problem.

Key words: *catenary; calculus of variations; Euler-Lagrange equation; funcional*

Obsah

1.	Úvod	1
2.	Řetězovka	1
3.	Odvození obecné rovnice řetězovky	3
3.1.	Odvození pomocí rovnováhy sil působících na elementu řetězovky	3
3.2.	Odvození pomocí variačního počtu.....	8
4.	Srovnání výsledků obou způsobů odvození	15
5.	Aplikace řetězovky na obloukové nosníky.....	18
5.1.	Nalezení konkávní řetězovky	18
5.2.	Úprava konkávní řetězovky	19
6.	Tvorba programu PAS.....	20
7.	Varianty řešení mostního nosníku z tradičních a progresivních materiálů	22
7.1.	Kompozity [3]	23
7.1.1.	Technologie výroby - pultruze	25
7.1.2.	Příklady užití kompozitů	26
7.2.	Sendvičové profily (sendviče).....	27
7.3.	Porovnání ocelového a kompozitního nosníku	27
8.	Závěr.....	29
9.	Přínos práce	30
10.	Použitá literatura	31

1. Úvod

V technice se snažíme o splnění základních požadavků na produkt, mezi něž patří např. funkčnost, bezpečnost, hospodárnost, prodejnost aj. Pro funkci je podstatné, aby zatížení nepřesáhlo tzv. mezní stav, tedy hodnotu, kdy nastává porucha (lom, nepřipustná deformace, zhroucení ztrátou stability). Toto dosahujeme v první řadě volbou materiálu - ocelová golfová hůl vydrží víc než hůl skleněná. Dále velikostí nosného průřezu - s rostoucí tloušťkou provazu, při použití téhož materiálu, poroste i jeho nosnost. A v poslední řadě vhodným tvarem průřezu i celé části. Správnou volbou tvaru produktu můžeme výrazně ovlivnit jeho hmotnost, tuhost a únosnost. Tato skutečnost je v práci aplikována na obloukové nosníky konstantního průřezu. Ideálním tvarem takovýchto nosníků je tvar řetězovky.

První část práce je věnována analytickému odvození rovnice řetězovky. Pro hlubší porozumění této křivce je řetězovka v práci odvozena dvěma způsoby. První způsob je založen na rovnováze sil působících na elementu řetězovky. Druhý způsob využívá variačního počtu k minimalizaci funkce potenciální energie vlákna konstantního průřezu zavěšeného ve dvou svých koncových bodech v homogenním gravitačním poli.

Výstupem práce bylo na základě odvození obecné rovnice řetězovky napsat program, který dokáže po zadání vstupních dat definovat ideální tvar obloukového nosníku pro daný technický problém.

2. Řetězovka

Zavěsíme-li provázek¹ konstantního průřezu za dva jeho koncové body do homogenního gravitačního pole, potom se provázek prověsí do křivky. Toto prověšení je způsobeno snahou každého elementu provazu minimalizovat svoji potenciální energii. Takto vzniklou křivku nazýváme řetězovka. Předností řetězovky je její minimální potenciální energie, která má za následek zmenšení tečných sil².

Jestliže řetězovka minimalizuje tečné síly, které na ní působí, pak souměrností této křivky podle osy x získáme tvar³ oblouku, který bude minimalizovat síly, které na něj působí. Tato vlastnost je v technice využívána v souvislosti s navrhováním samonosných konstrukcí - obloukových nosníků.

¹ Obecně vlákno. V práci jsou využity obě označení.

² Síle tečných k tvaru řetězovky tzn. kolmých k průřezu provazu.

³ Tento tvar je v práci nazýván jako konkávní řetězovka.



Obr. 1 - Tvar řetězovky



Obr. 2 - Obloukový nosník tvaru konkávní řetězovky (pohled 1)



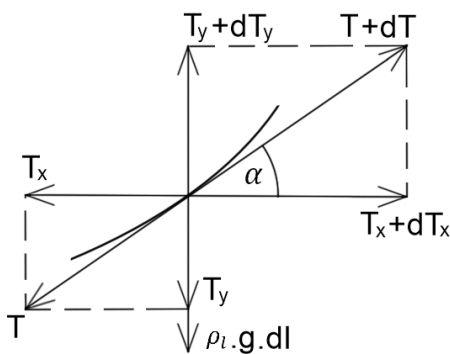
Obr. 3 - Obloukový nosník tvaru konkávní řetězovky (pohled 2)

3. Odvození obecné rovnice řetězovky

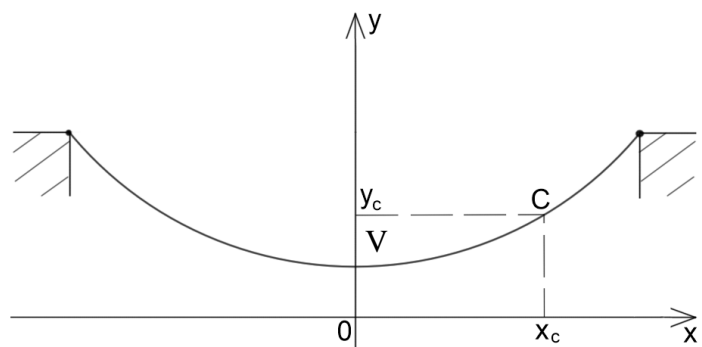
Pro oba následující způsoby odvození rovnice řetězovky uvažujme situaci popsanou v kapitole 2. *Řetězovka*.

3.1. Odvození pomocí rovnováhy sil působících na elementu řetězovky

Váží-li jeden metr vlákna ρ_l kg, pak bude separovaný infinitesimální⁴ element lana C o délce dl vážit $\rho_l \cdot dl$ kilogramů. Tíhová síla tohoto elementu je $\rho_l \cdot g \cdot dl$. Aby separovaný element vlákna byl v rovnováze, je třeba nahradit účinky odňatých částí tangenciálními silami T a $(T + dT)$ podle [1]:



Obr. 4 - Separovaný element vlákna



Obr. 5 - Zavedení kartézského souřadnicového systému Oxy

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -T_x + T_x + dT_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -\rho_l \cdot g \cdot dl - T_y + T_y + dT_y = 0$$

$$dT_x = 0 \Rightarrow T_x = konst$$

$$dT_y = \rho_l \cdot g \cdot dl \tag{1}$$

$$T_y = \rho_l \cdot g \cdot l + c_1 \quad ; \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$\sum F_{ix} = 0$... suma všech sil rovnoběžných s osou x se rovná nula

⁴ Nekonečně malý

$\sum F_{iy} = 0$... suma všech sil rovnoběžných s osou y se rovná nula⁵

Hodnotu konstanty c_1 lze určit na základě mezní podmínky vrcholu řetězovky V :

Pro bod V : $l = 0 \wedge \alpha = 0 \Rightarrow T_y = 0$: $0 = \rho_l \cdot g \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow T_y = \rho_l \cdot g \cdot l$

Úsek dl je infinitezimální⁶ proto můžeme o úseku dl uvažovat jako o přímce:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (2)$$

Z obr. 3 lze vyvodit vztah mezi silami T_x a T_y :

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$$

$$T_y = T_x \cdot \tan \alpha = T_x \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow dT_y = T_x \cdot d \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (3)$$

Dosazením rovnice (3) do rovnice (4) získáme:

$$dT_y = \rho_l \cdot g \cdot dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (4)$$

Do rovnice (4) dosadíme za dT_y z rovnice (3):

$$T_x \cdot d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \rho_l \cdot g \cdot dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (5)$$

V předchozím textu bylo dokázáno, že síla T_x je konstantní. Pro zjednodušení rovnice (5) zavedeme substituci podle [1] ve které sílu T_x nahradíme součinem konstant ρ_l , g a a . Po dosazení této substituce do rovnice (5) bude možné konstanty ρ_l a g zkrátit a tím celou rovnici zjednodušit:

$$T_x = \rho_l \cdot g \cdot a \quad ; a = konst \wedge a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Můžeme psát:

⁵ Jedná se o matematickou formulaci prvního Newtonova zákona - zákona setrvačnosti. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo je výslednice sil nulová, pak je těleso v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

⁶ Nekonečně malý

$$\rho_l \cdot g \cdot a \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \rho_l \cdot g \cdot dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow a \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\int \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}} = \int \frac{dx}{a}$$

K integraci je použit vzorec:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right|$$

$$\ln \left| \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \right| = \frac{x}{a} + c_2 \quad ; \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Odstranění absolutní hodnoty⁷:

$$\forall y \in \mathbb{R}: \left| \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \right| = \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} > 0$$

$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} > -\frac{dy}{dx}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 > \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$1 > 0$$

$$\forall y \in \mathbb{R}: \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} > 0 \Rightarrow \left| \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \right| = \frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

Proto platí:

⁷ Výraz v absolutní hodnotě je argumentem přirozeného logaritmu. Pro odstranění absolutní hodnoty je třeba dokázat, že výraz v absolutní hodnotě je kladný pro všechny hodnoty proměnné y.

$$\ln\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\right) = \frac{x}{a} + c_2$$

Vrchol $V = [0; ?]$ je globální extrém řetězovky, proto je první derivace podle x v bodě V rovna 0:

$$f'(V) = 0: \ln\left(0 + \sqrt{0^2 + 1}\right) = \frac{0}{a} + c_2$$

$$\ln 1 = c_2$$

$$c_2 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) = \frac{x}{a}$$

Použijeme větu:

$$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$$

$$e^{\ln\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)} = e^{\frac{x}{a}}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{\frac{x}{a}} \quad (6)$$

Podle [1] zjednodušíme rovnici (6) tak, že od ní odečteme rovnici (7) vzniklou umocněním rovnice (6) na minus prvou. Rovnice (7):

$$\left[\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^{-1} = \left(e^{\frac{x}{a}}\right)^{-1}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Zlomek na pravé straně rovnice usměrníme:

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \cdot \frac{-\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{-\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{-\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)^2} = \frac{-\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = -\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (7)$$

Od rovnice (6) odečteme rovnici (7):

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = -\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} = 2 \frac{dy}{dx} \quad (8)$$

Vzniklou diferenciální rovnici (8) řešíme metodou separace proměnných:

$$\int \frac{dx}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) = \int dy$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{a}} \cdot e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{-\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{x}{a}} \right) = y$$

$$f_1: y = \frac{a}{2} \cdot (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkce f_1 je hledaná funkce popisující tvar řetězovky.

Výpočet druhé souřadnice vrcholu řetězovky $V = [0; ?]$:

$$\text{Pro } V \in f_1: \quad y = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{0}{a}} + e^{-\frac{0}{a}} \right) = \frac{a}{2} \cdot (1 + 1) = a \Rightarrow V = [0; a]$$

Konstanta a je tedy vzdálenost vrcholu řetězovky V od osy x .

3.2. Odvození pomocí variačního počtu

Začneme od definice funkcionálu:

$$J[y(x)] = \int_a^b F[y(x), y'(x), x] dx$$

Jedná se o zobrazení z lineárního prostoru $O(y(x))$ do podmnožiny všech reálných čísel $O(J(y(x))) \subset \mathbb{R}$:

$$O(y(x)) \rightarrow O(J(y(x))) \subset \mathbb{R}$$

Víme, že každý bod řetězovky má minimum potenciální energie. Proto budeme hledat minimum tzn. extrém funkcionálu:

$$\delta J[y(x)] = 0$$

Abychom našli funkci, pro kterou bude funkcionál nabývat extrému, použijeme následující podmínku podle [2]:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y') dx = 0$$

Substituce ... $\delta y = h(x)$; $\delta y' = h'(x)$

$$\int_a^b (F'_y h(x) + F'_{y'} h'(x)) dx = \int_a^b F'_y h(x) dx + \int_a^b F'_{y'} h'(x) dx = 0 \quad (9)$$

Druhý člen rovnice (9) integrujeme metodou per partes:

$$\text{Integrace per partes ...} \quad \int (u \cdot v)' dx = \int u \cdot v' \cdot dx + \int u' \cdot v \cdot dx \quad (10)$$

$$\int_a^b F'_y h(x) dx + \int_a^b F'_{y'} h'(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = F'_{y'}; \quad v' = h'(x) \\ v = h(x); \quad u' = \frac{\partial}{\partial x} (F'_{y'}) \end{array} \right] = 0$$

$$\int_a^b F'_y h(x) dx + [F'_{y'} h(x)]_a^b - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (F'_{y'}) \cdot h(x) dx = 0 \quad (11)$$

Druhý člen rovnice (11) integrujeme zvlášť:

$$[F'_{y'} h(x)]_a^b = F'_{y'} h(b) - F'_{y'} h(a) \quad (12)$$

Z mezních podmínek vyplývá:

$$h(a) = \delta y(a) = 0; \quad h(b) = \delta y(b) = 0$$

Hodnotu $h(a)$ a $h(b)$ dosadíme zpět do rovnice (12):

$$F'_{y'} \cdot 0 - F'_{y'} \cdot 0 = 0$$

Druhý člen rovnice (11) je tedy roven nule:

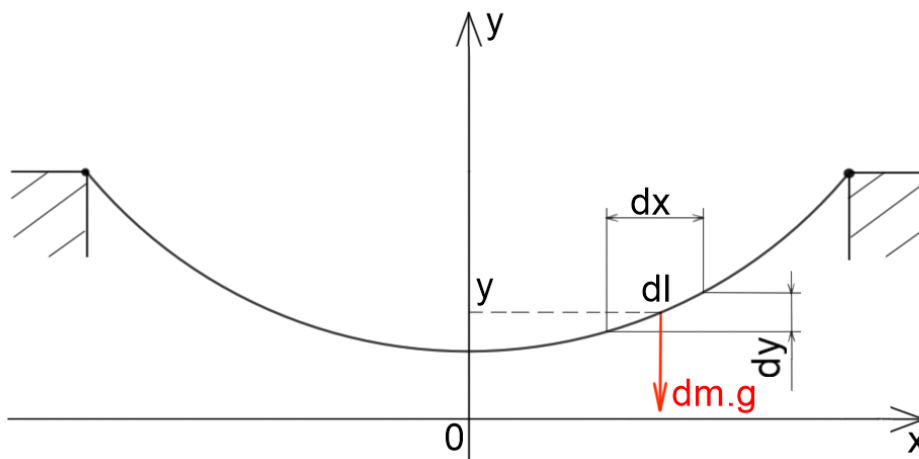
$$\int_a^b F'_y h(x) dx - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (F'_{y'}) \cdot h(x) dx = 0$$

$$\int_a^b F'_y h(x) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (F'_{y'}) \cdot h(x) dx$$

$$F'_y h(x) = \frac{\partial}{\partial x} (F'_{y'}) \cdot h(x)$$

$$F'_y = \frac{\partial}{\partial x} (F'_{y'}); \quad h(x) \neq 0 \quad (13)$$

Nyní je třeba nalézt funkcionál F potenciální energie vlákna. Předpokládáme, že vlákno má konstantní průřez a je zavěšené ve dvou svých koncových bodech v homogenním gravitačním poli. Pro funkcionál F budeme pomocí Euler-Lagrangeovy rovnice (13) hledat takovou funkci $f(x)$, pro kterou bude funkcionál F nabývat extrému.



Obr. 6 - Hledání funkcionálu potenciální energie

Potenciální energie dE_p infinitesimalního úseku vlákna:

$$dE_p = dm \cdot g \cdot y \quad (14)$$

$g[m \cdot s^{-2}]$... gravitační zrychlení

$y[m]$... vzdálenost infinitesimalního úseku vlákna od osy x

$dm[kg]$... hmotnost infinitesimalního úseku provazu

Určení dm :

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dl \cdot S$$

Substituce: $\rho_l = \rho \cdot S$

$$dm = \rho_l \cdot dl \quad (15)$$

$\rho[kg \cdot m^{-3}]$... hustota provazu

$S[m^2]$... obsah průřezu provazu

$dl[m]$... délka infinitesimalního úseku provazu

$\rho_l[kg \cdot m^{-1}]$... lineární hustota provazu

Určení dl :

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \wedge y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' dx$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (y' dx)^2} = \sqrt{(dx)^2 \cdot [1 + y'^2]} = \sqrt{1 + y'^2} dx = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (16)$$

Do rovnice potenciální energie (14) postupně dosadíme hodnotu dm z rovnice (15) a hodnotu dl z rovnice (16):

$$dE_p = dm \cdot g \cdot y = \rho_l \cdot dl \cdot g \cdot y = \rho_l \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \cdot g \cdot y = \rho_l \cdot g \cdot y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int_a^b dE_p = \int_a^b \rho_l \cdot g \cdot y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$E_p = \int_a^b \rho_l \cdot g \cdot y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_a^b F \cdot dx$$

$$F = \rho_l \cdot g \cdot y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

(17) je hledaný funkcionál F . Tento funkcionál dosadíme do vztahu (13):

$$F'_y = \frac{\partial}{\partial x} (F'_y')$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_l \cdot g \cdot y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[\rho_l \cdot g \cdot y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

$$\rho_l \cdot g \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} y = \rho_l \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (18)$$

Pravou stranu rovnice (18) upravíme zvlášť:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left[y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left[y \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[y \cdot \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] =$$

$$= y' \cdot \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} + y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + y \cdot \frac{y'' \cdot (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - y' \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \\
&= \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + y \cdot \frac{y'' \cdot (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - y' \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (1+y'^2)}{1+y'^2} = \\
&= \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + y \cdot \frac{y'' \cdot (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{y'}{2} \cdot (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' \cdot \frac{\partial}{\partial x} y'}{1+y'^2} = \\
&= \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + y \cdot y'' \cdot \frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}}{1+y'^2} = \\
&\frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + y \cdot y'' \cdot \frac{1+y'^2 - y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y \cdot y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y'^2 \cdot (1+y'^2) + y \cdot y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{y'^2 + y'^4 + y \cdot y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y'^4 + y'^2 + y \cdot y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Tento upravený člen dosadíme zpět do rovnice (18):

$$(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{y'^4 + y'^2 + y \cdot y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{y'^4 + y'^2 + y \cdot y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{y'^4 + y'^2 + y \cdot y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{y'^4 + y'^2 + y \cdot y'' - (1+y'^2)^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\frac{y'^4 + y'^2 + y \cdot y'' - (1 + 2y'^2 + y'^4)}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\frac{y \cdot y'' - y'^2 - 1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad ; \quad (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \neq 0$$

$$y \cdot y'' - y'^2 - 1 = 0 \tag{19}$$

Zavedeme substituce:

$$y' = p \tag{20}$$

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \tag{21}$$

Substituce (20) a (21) dosadíme do upravené Euler-Lagrangeovy rovnice (19):

$$y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p - p^2 - 1 = 0 \tag{22}$$

Diferenciální rovnici (22) řešíme metodou separace proměnných:

$$y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = p^2 + 1$$

$$\int \frac{p}{p^2 + 1} \cdot dp = \int \frac{dy}{y} \tag{23}$$

K integraci levé strany rovnice (23) použijeme vzorec:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$$

$$\int \frac{p}{p^2 + 1} \cdot dp = \frac{1}{d} \int \frac{d \cdot p}{p^2 + 1} \cdot dp$$

$$\frac{1}{d} \int \frac{d \cdot p}{p^2 + 1} \cdot dp = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx \Leftrightarrow g(x) = p^2 + 1 \wedge g'(x) = d \cdot p \quad ; d \neq 0$$

$$g'(x) = (p^2 + 1)' = 2 \cdot p = d \cdot p$$

$$d = 2 \neq 0$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot p}{p^2 + 1} \cdot dp = c \cdot \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = c \cdot \ln|g(x)| + C$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot p}{p^2 + 1} \cdot dp = \frac{1}{2} \ln|p^2 + 1| + c_1 \quad ; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\forall p \in \mathbb{R}: p^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow \ln|p^2 + 1| = \ln(p^2 + 1)$$

$$\int \frac{p}{p^2 + 1} \cdot dp = \frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) + c_1 \quad (24)$$

Vztah (24) dosadíme zpět do rovnice (23):

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) + c_1 = \int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) + c_1 = \ln|y| + c_2 \quad ; \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) = \ln|y| + c_2 - c_1$$

Pro zjednodušení zavádíme substituci:

$$c_2 - c_1 = c_3 \quad ; \quad c_1 \in \mathbb{R} \wedge c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow c_3 = (c_2 - c_1) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) = \ln|y| + c_3 \quad (25)$$

Obecně platí:

Integrací funkce $f(x)$ získáme funkci $F(x)$, jež je primitivní funkcí k $f(x)$. K funkci $F(x)$ se dále přičítá konstanta $C \in \mathbb{R}$ charakterizující možné posunutí funkce $F(x)$ po ose y .
Matematický zápis:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Ať už je hodnota konstanty C jakákoliv, charakterizuje pouze posunutí základní⁸ funkce $F(x)$.
Dále platí:

$$\frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} C = \frac{d}{dx} F(x) + 0 = f(x)$$

⁸ Základní funkce je zde chápána jako funkce, jež není posunutá po ose y .

V rovnici (25) nás zajímá právě základní funkce $f(x)$, proto při řešení této rovnice zavedeme $c_3 = 0$:

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) = \ln|y| = \ln y ; \quad y > 0$$

$$\ln(p^2 + 1) = 2 \ln y$$

$$\ln(p^2 + 1) = \ln y^2 \Leftrightarrow p^2 + 1 = y^2 ; \quad p = y'$$

$$y'^2 + 1 = y^2$$

$$y'^2 = y^2 - 1$$

$$y' = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

$$x = \operatorname{argcosh} y + c_4 ; \quad c_4 \in \mathbb{R}$$

$$\cosh(x - c_4) = y$$

$$f_2: \quad y = \cosh(x - c_4)$$

Funkce f_2 je hledaná funkce popisující tvar řetězovky.

Pro hyperbolický kosinus platí:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$y = \cosh(x - c_4) = \frac{1}{2}[e^{x-c_4} + e^{-(x-c_4)}] = \frac{1}{2}(e^{x-c_4} + e^{c_4-x})$$

$$f_2: \quad y = \frac{1}{2}(e^{x-c_4} + e^{c_4-x})$$

4. Srovnání výsledků obou způsobů odvození

$$f_1: \quad y = \frac{a}{2} \cdot (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad ; \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f_2: y = \frac{1}{2}(e^{x-c_4} + e^{c_4-x}) ; c_4 \in \mathbb{R}$$

Při bližším pohledu na funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ je patrné, že funkce $f_2(x)$ je speciálním případem funkce $f_1(x)$, kde $a = 1$. Jestliže vrcholem řetězovky $f_1(x)$ je bod $V = [0; a]$, pak je vrcholem řetězovky $f_2(x)$ bod $V = [0; 1]$:

Pro $f_2(x)$: $a = 1$: $V = [0; a] = [0; 1] \in f_2(x)$; V – vrchol řetězovky $f_2(x)$

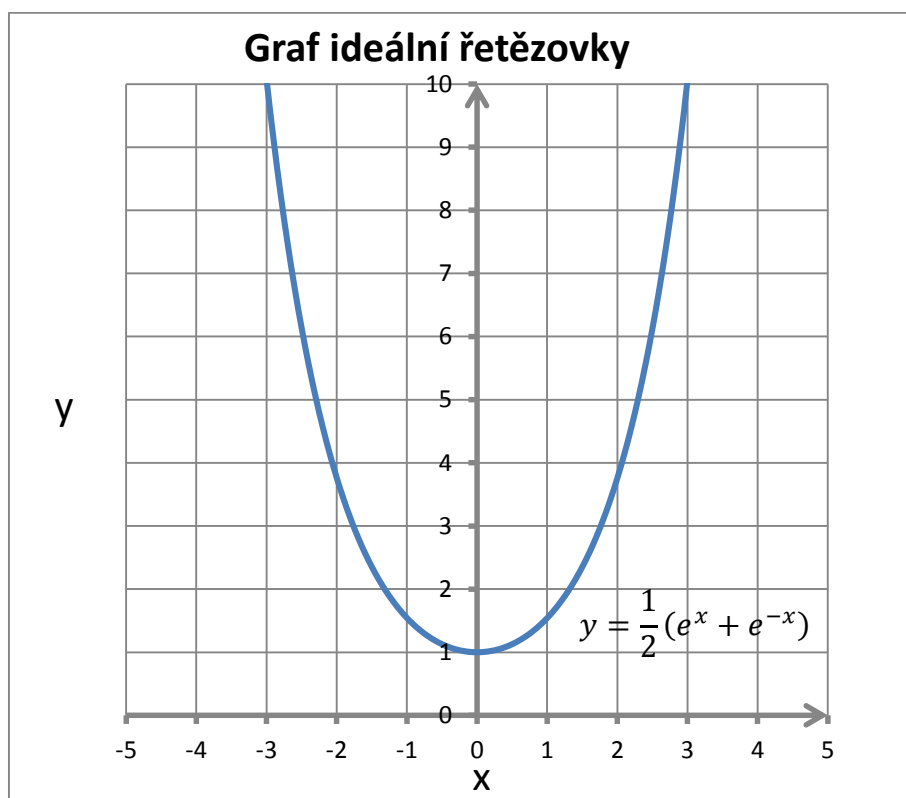
$$V = [0; 1] \in f(x): 1 = \frac{1}{2}(e^{0-c_4} + e^{c_4-0})$$

$$2 = e^{0-c_4} + e^{c_4-0} = 1 + 1 \Leftrightarrow e^{0-c_4} = 1 \wedge e^{c_4-0} = 1$$

$$e^{0-c_4} = e^0 \wedge e^{c_4-0} = e^0$$

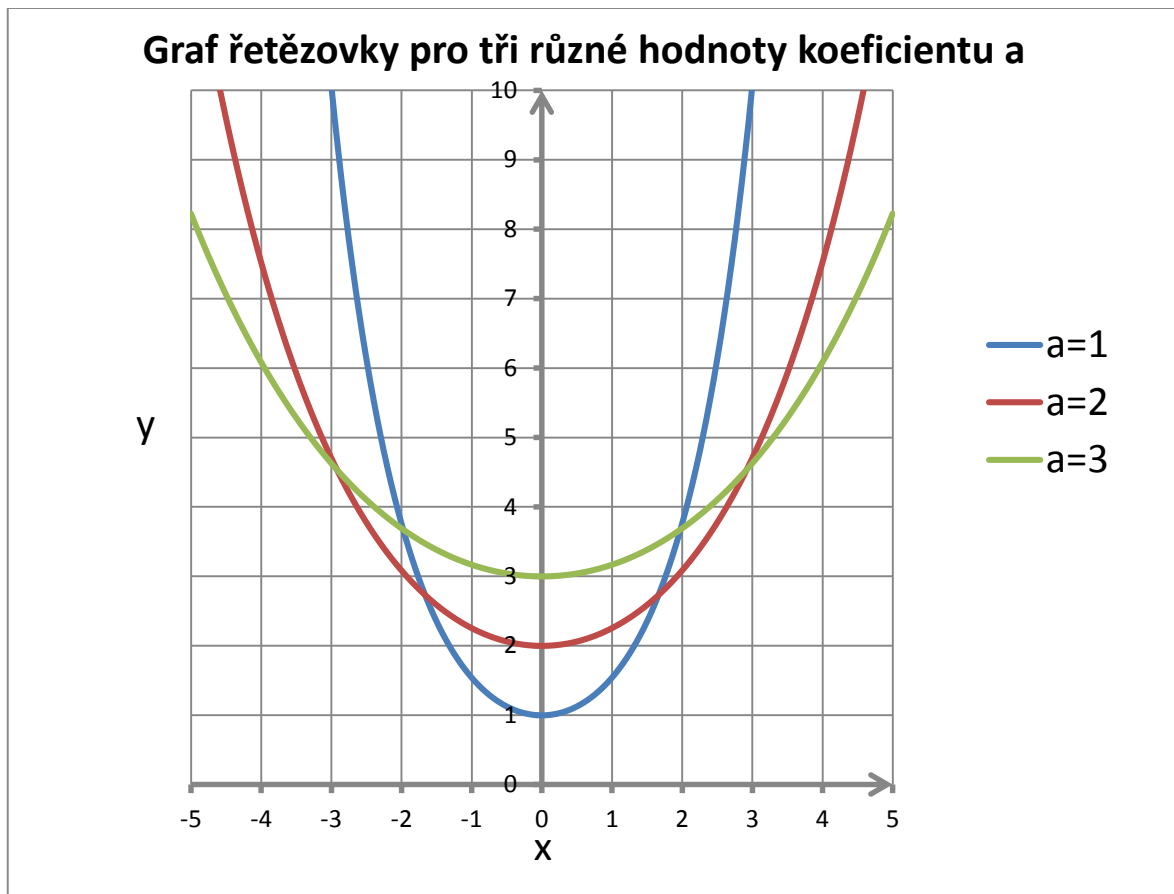
$$0 - c_4 = 0 \wedge c_4 - 0 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$f_2: y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) ; f_2 - \text{ideální řetězovka}$$



Graf 1

$$f_1: y = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) ; a \in \mathbb{R} - \{0\}; f_1 - \text{obecná řetězovka}$$



Graf 2

V grafu 2 je vidět, jak se změnou koeficientu a mění i křivost řetězovky. Se zvětšujícím se koeficientem a roste také vzdálenost vrcholu řetězovky V od osy x - toto tvrzení je patrné i ze zápisu $V = [0; a]$, které bylo dokázáno v závěru kapitoly 3.1. *Odvození pomocí rovnováhy sil působících na elementu řetězovky.*

Ideální řetězovka (Graf 1) má velmi rychlý náběh - na krátkém intervalu nabývá vysokých hodnot⁹. V technické praxi se může stát, že budeme prostorově omezeni a tvar ideální řetězovky nebude možné použít. Změnou koeficientu a v obecné rovnici řetězovky můžeme tvar křivky měnit a tím se vyhnout problému s prostorovým omezením. Obecná rovnice řetězovky v sobě navíc zahrnuje i ideální řetězovku. Z těchto důvodů se práce dále zabývá obecnou rovnicí řetězovky.

⁹ V tomto ohledu je srovnatelná s exponenciální funkcí.

5. Aplikace řetězovky na obloukové nosníky

Řetězovka minimalizuje tečné síly, které na ní působí. Souměrností řetězovky podle osy x získáme tvar oblouku, který minimalizuje síly, které na něj působí. Takový oblouk, vzniklý souměrností řetězovky podle osy x , nazýváme konkávní řetězovka.

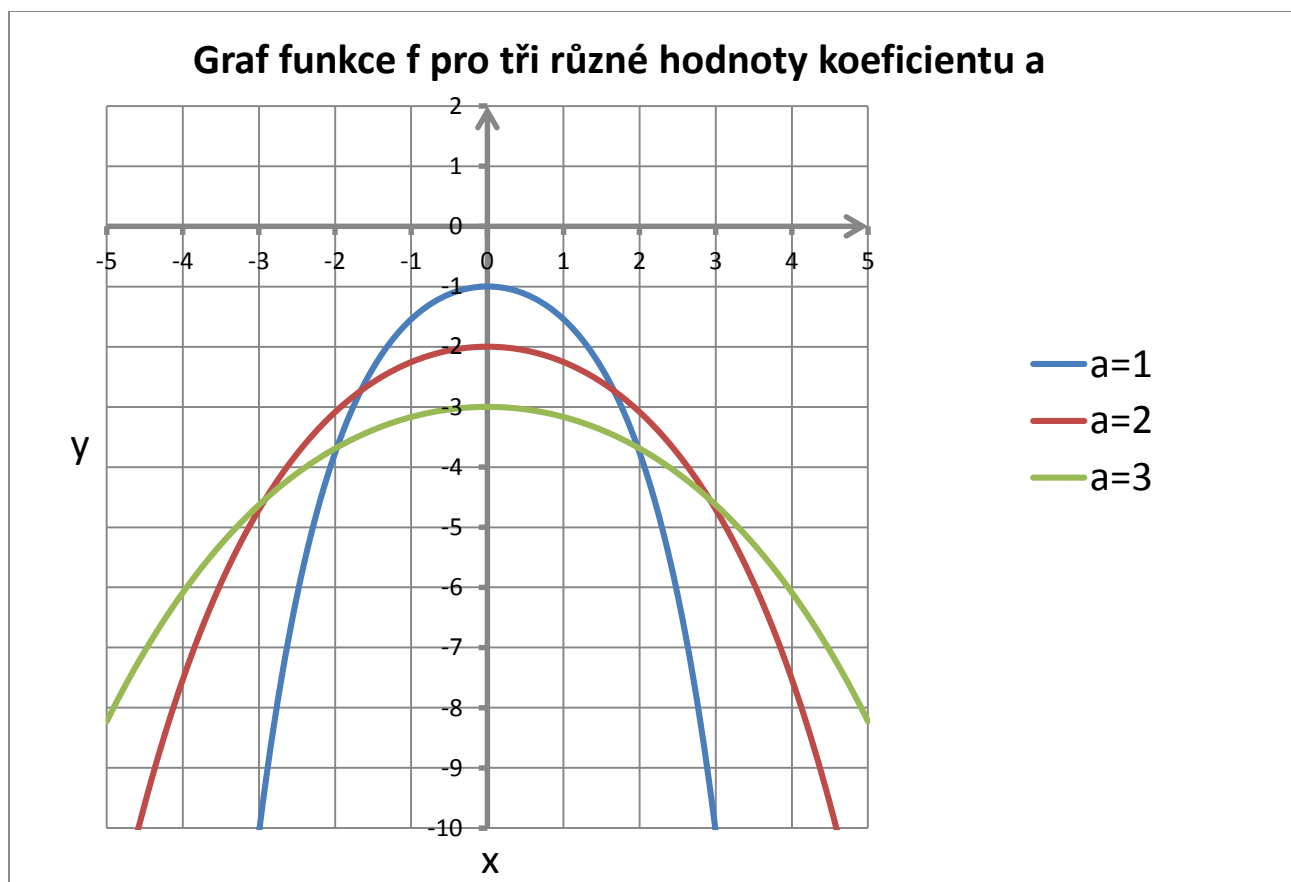
Vzhledem ke zmíněným vlastnostem představuje konkávní řetězovka ideální tvar nosných konstrukcí. Další kapitola se proto zabývá nalezením konkávní řetězovky a její úpravou. Výsledný tvar konkávní řetězovky bude využit v programu, který bude řešit tvary obloukových nosníků na základě konkrétních požadavků.

5.1. Nalezení konkávní řetězovky

Konkávní tvar řetězovky získáme tak, že pravou stranu obecné rovnice řetězovky vynásobíme mínus jedničkou.

$$f_1: y = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

$$f: y = -\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad ; \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}; \quad f - \text{konkávní řetězovka}$$



Graf 3

5.2. Úprava konkávní řetězovky

Základní vstupní hodnotou výsledného programu je šířka oblouku s . Pro přehlednější zobrazování posuneme řetězovky z grafu 3 tak, aby všechny procházely na ose y dvěma body. Zavedeme proto body $A = \left[-\frac{s}{2}; 0\right] = [A_1; A_2]$ a $B = \left[\frac{s}{2}; 0\right] = [B_1; B_2]$. Vzdálenost $|\overrightarrow{AB}| = s$. Potřebného posunutí řetězovek docílíme tak, že do rovnice konkávní řetězovky přidáme absolutní člen C . Pro tento člen bude platit:

$$C = |\overrightarrow{AX_A}| = |\overrightarrow{BX_B}| \quad ; \quad X_A = \left[-\frac{s}{2}; y_A\right] \in f$$

$$X_B = \left[\frac{s}{2}; y_B\right] \in f$$

$$f: y = -\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad ; \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

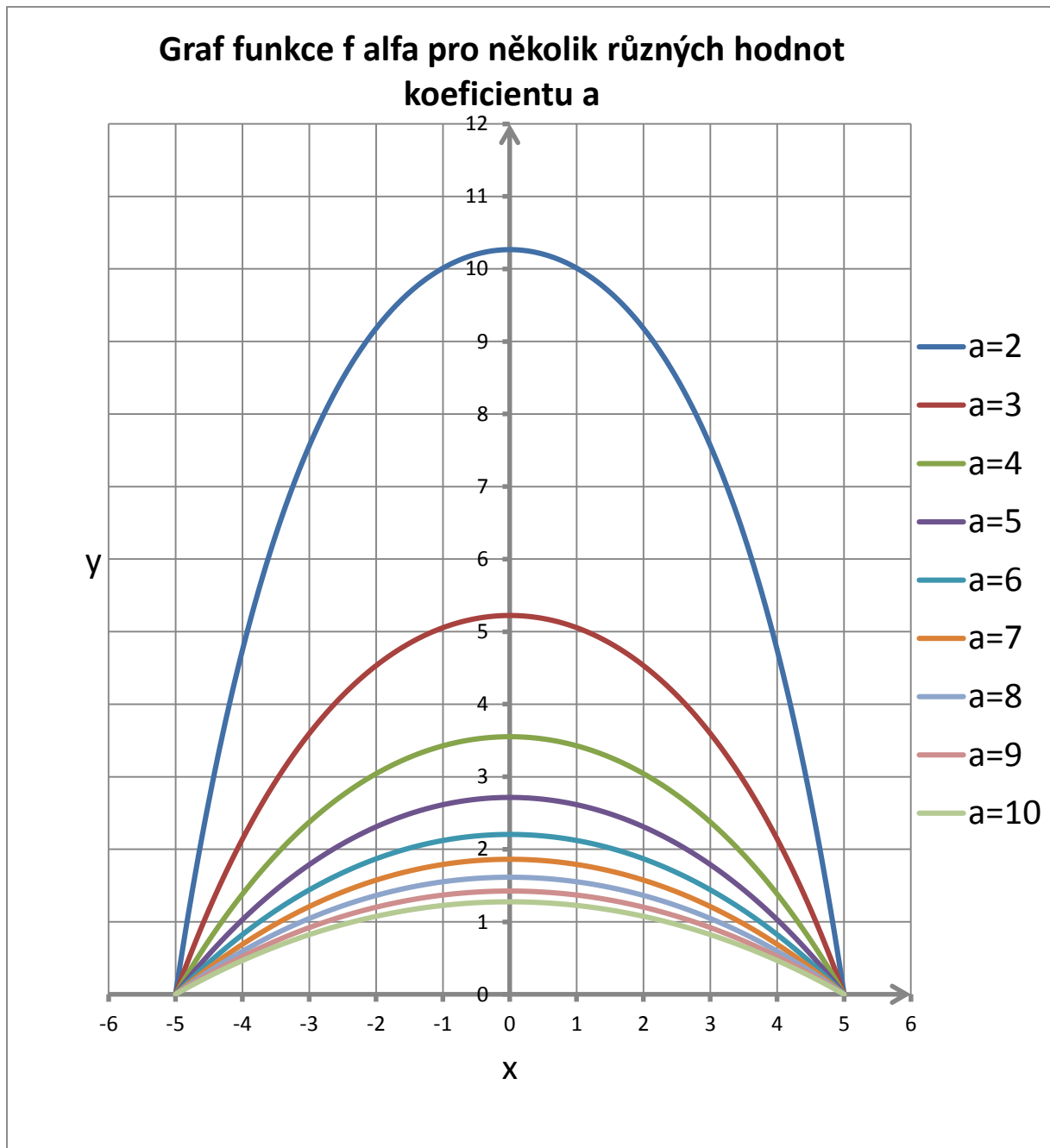
$$|\overrightarrow{AX_A}| = \sqrt{\left(-\frac{s}{2} - A_1\right)^2 + (y_A - A_2)^2} = \sqrt{\left[-\frac{s}{2} - \left(-\frac{s}{2}\right)\right]^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{y_A^2}$$

$$|\overrightarrow{AX_A}| = |y_A| = \left| -\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{-s}{a}} + e^{-\frac{-s}{a}}\right) \right| = \left| -\frac{a}{2} \cdot \left(e^{-\frac{s}{2a}} + e^{\frac{s}{2a}}\right) \right|$$

$$|\overrightarrow{AX_A}| = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{s}{2a}} + e^{-\frac{s}{2a}}\right) = C$$

Hodnotu absolutního členu C dosadíme do rovnice funkce f a získáme tak novou funkci f_α :

$$f_\alpha: y = -\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{s}{2a}} + e^{-\frac{s}{2a}}\right) \quad ; \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad s - \text{šířka oblouku}$$



Graf 4

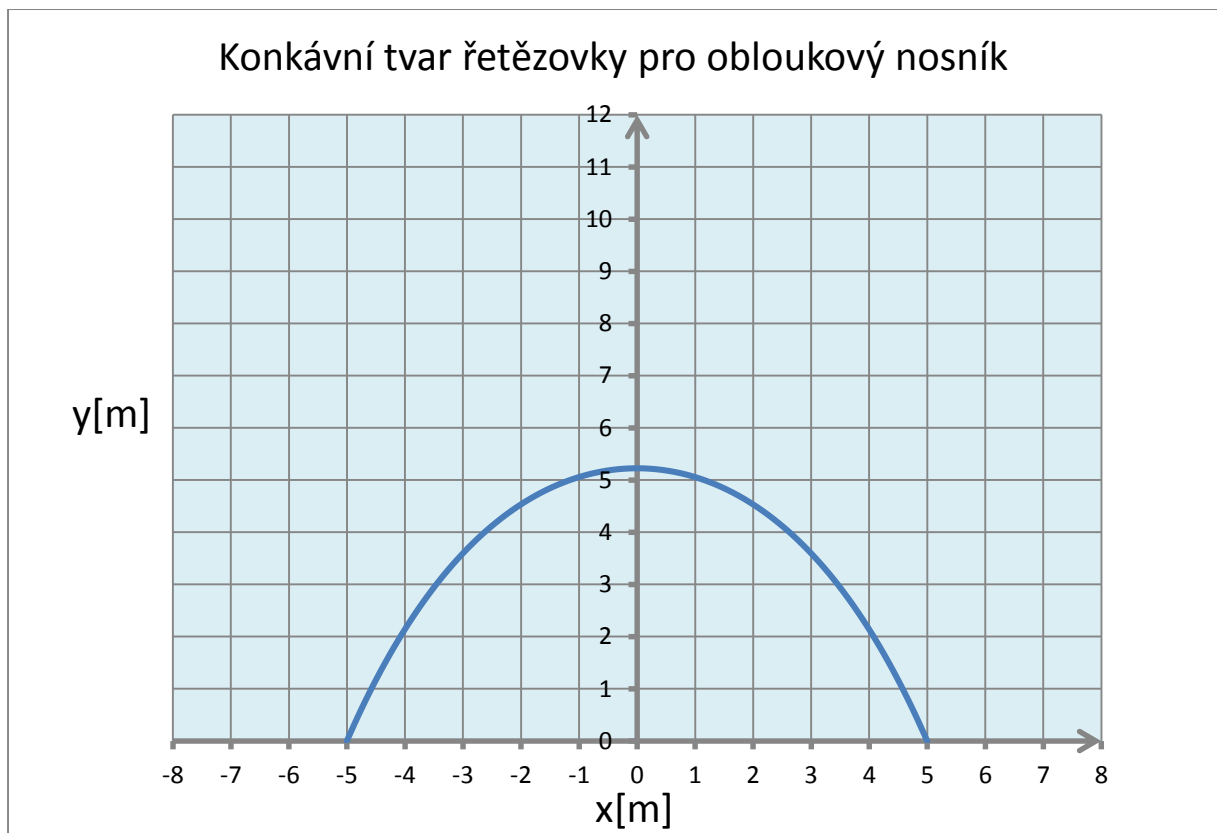
Graf 4 je vyobrazením situace, kdy je šířka oblouku $s = 10$ a koeficient a postupně roste od hodnoty 2 do hodnoty 10. V podstatě se jedná o ukázkou několika různých způsobů užití řetězovky k řešení tvaru obloukového nosníku pro danou šířku oblouku.

6. Tvorba programu PAS

PAS je název programu, který je závěrem této práce. Jedná se o zkratku *Perfect Arc Solver* - Řešitel ideálního oblouku. Program funguje následujícím způsobem. Uživatel zadá požadovanou šířku oblouku. Program šířku oblouku zadá do funkce f_a a vyhodnotí graf pro koeficient $a = 2$. Uživatel si pak může pomocí posuvníků, měnit parametry řetězovky dle

potřeby. Jedním posuvníkem může měnit koeficient a a tím měnit i křivost řetězovky. Druhý posuvník bude upravovat šířku oblouku. Provedené změny parametrů se graficky ihned zobrazují. Tímto způsobem si může uživatel jednoduše zobrazit hned několik možných řešení obloukového nosníku a vybrat si, které z nich je pro něj nejvýhodnější (z hlediska prostorového omezení, výšky oblouku, délky oblouku atd.).

V technice není vždy možné vytvářet naprosto přesné oblouky, kvůli obtížnosti jejich výroby. Program proto nabízí i aproximované varianty řetězovky. Jednoduše stačí jen na posuvníku aproximace nastavit na kolik úseků je třeba řetězovku rozdělit. Program následně graficky vyhodnotí oba typy řešení - před i po aproximaci.



Graf 5

Graf 5 je ukázkou grafického řešení konkávní řetězovky pro koeficient $a = 3$ a šířku oblouku $s = 10$.



Graf 6

Graf 6 je aproximací grafu 5 pro 6 úseků aproximace.

V části programu nazvané *Výstupní data* jsou následně zapsány všechny hodnoty týkající se řetězovky, kterou uživatel pomocí posuvníků nastavil. Část *Výstupní data* obsahuje následující informace:

- Konkrétní rovnici řetězovky pro dané hodnoty. Tato rovnice je ve výstupních datech zapsána ve dvou různých tvarech - uživatel si tak může vybrat ten tvar se kterým se mu bude lépe pracovat.
- Výšku oblouku pro dané hodnoty.
- Tabulku popisující délky jednotlivých úseků aproximace.

7. Varianty řešení mostního nosníku z tradičních a progresivních materiálů

Na obr. 7 můžeme vidět řešení mostního nosníku pomocí tradičního materiálu - oceli. Tento obloukový nosník je po své délce zatěžován tíhou celého mostu. Toto zatížení způsobuje

ohybový moment, který nosník namáhá. Při volbě materiálu nosníku se k tomuto způsobu zatížení přihlíží.

V této kapitole budeme porovnávat dvě varianty řešení nosníku - jeden vyrobený z oceli a druhý z kompozitu. Kompozitní materiály¹⁰ nejsou tak rozšířené jako materiály ocelové, proto je jim věnována následující podkapitola.



Obr. 7 - Ukázka obloukového ocelového nosníku

7.1. Kompozity [3]

Různé materiály disponují různými vlastnostmi, proto se liší i jejich vhodnost pro konkrétní typy namáhání¹¹. Složeninou dvou a více různých materiálů získáme tzv. kompozit. Výsledné vlastnosti kompozitu jsou dány kombinací vlastností jeho dílčích složek.

Složení kompozitů:

- Výztuže (vlákna)
- Plniva (částice, zrna, kuličky, vločky, pěna, ...)
- Pojivo (matrice)

¹⁰ Kompozity.

¹¹ Tah, tlak, smyk, krut a ohyb.

Výztuže

Jako výztuž se volí vlákna, protože dosahují v jejich podélném směru velmi vysoké pevnosti a vysokých hodnot modulů pružnosti. Průměr jednoho vlákna je přibližně 5 – 15 μm . Z těchto vláken se pak vyrábí např. desky¹², konkrétní součástky nebo tzv. očka. Výztuž tvoří přibližně 40-60% objemu kompozitu.



Obr. 8 - Očko

Typy vláken:

- Skleněná
- Uhlíková
- Polymerní
- Keramická
- Kovová
- Přírodní

Plnivo

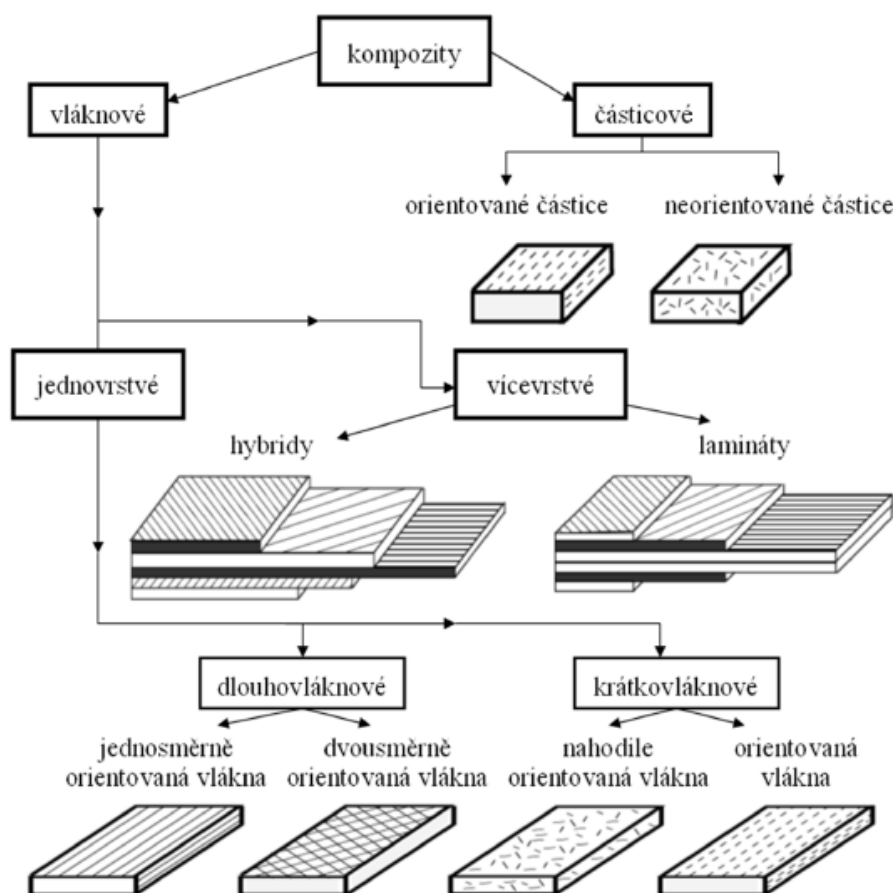
Jedná se o materiál, který jednoduše vyplňuje prostor mezi dvěma vláknovými deskami. V určitých situacích nemusí být potřeba¹³.

¹² Někdy zvané skiny (z anglického slova skin - kůže).

¹³ Očka jsou pro příklad tvořena pouze výztuží (vláknem) a pojivem (pryskyřicí).

Pojivo

Jeho hlavní funkcí je mimo jiné držet vlákna ve správných pozicích. Jako pojivo se používají polymerní pryskyřice¹⁴. Pojivo je namáháno ve směru (směrech) kolmém (příčném) na vlákna.

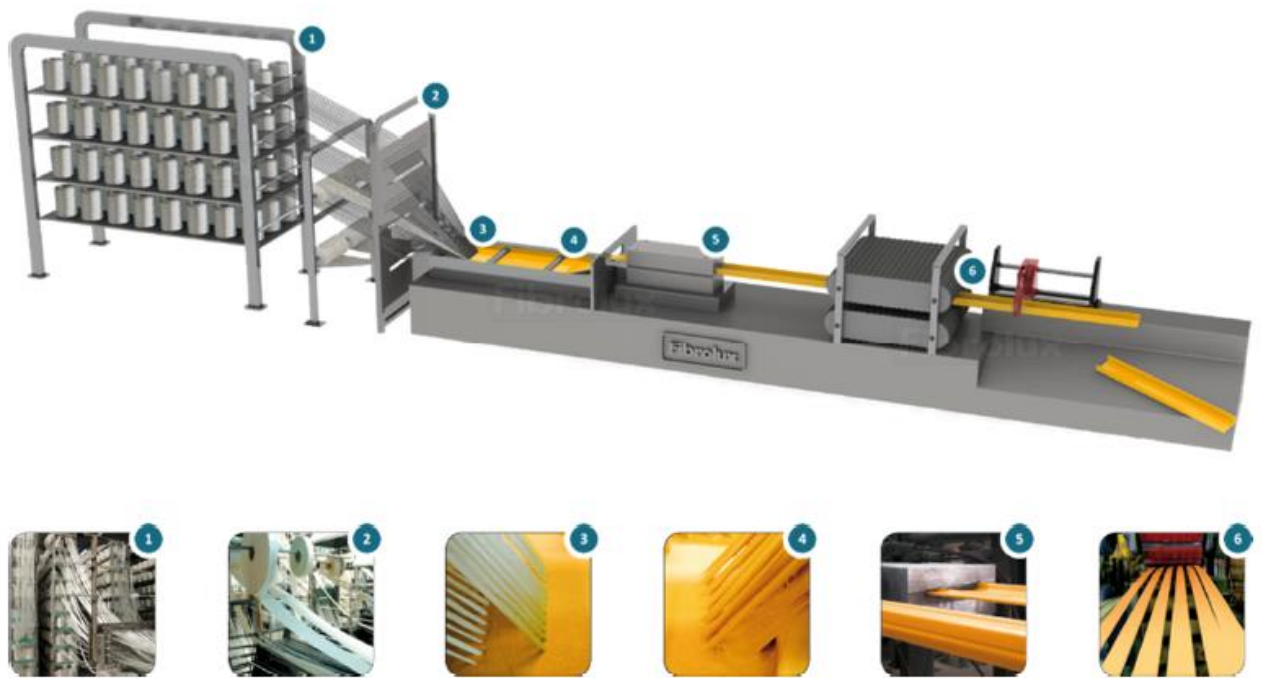


Obr. 9 - Rozdělení kompozitů [3]

7.1.1. Technologie výroby - pultruze

Pultruze je způsob výroby celo-vláknových kompozitů. Vlákna se z rolí vtahují do lázně obsahující pojivo. Poté vlákna putují do formovacího profilu. Zde se spleť vláken, obalených pojivem, formuje do požadovaného tvaru a zahřívá. Ohříváním směsi dochází ke ztuhnutí pojiva a vzniká kompozit. Vzniklý kompozit se nakonec řeže na požadovanou délku.

¹⁴ Ta může být epoxidová, polyesterová, fenolová nebo polyamidová.



Obr. 10 - Pultruze [3]

7.1.2. Příklady užití kompozitů

Kompozity nachází svoje využití všude tam, kde jsou velké nároky na nízkou hmotnost. Příkladem je kompozitní horské kolo, karosérie automobilu Bugatti Veyron a přední část raketoplánu Columbia.

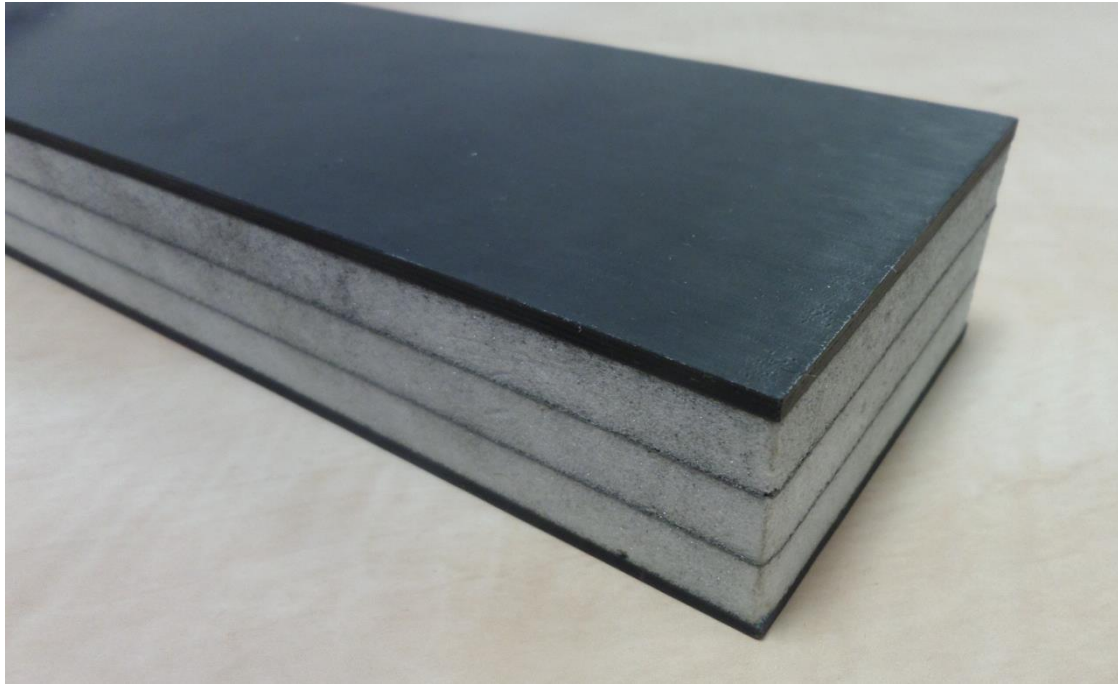


Obr. 11 - Příklady užití kompozitních materiálů [3]

7.2. Sendvičové profily (sendviče)

Je to specifický typ kompozitu vyznačující se velkou ohybovou tuhostí a nízkou hmotností. Tyto vlastnosti z něj činí ideální materiál pro výrobu nosníků.

Sendviče se skládají ze skinů¹⁵ a jádra. Jádro je část sendviče vyplňující prostor mezi skiny¹⁶.



Obr. 12 - Sendvičový profil

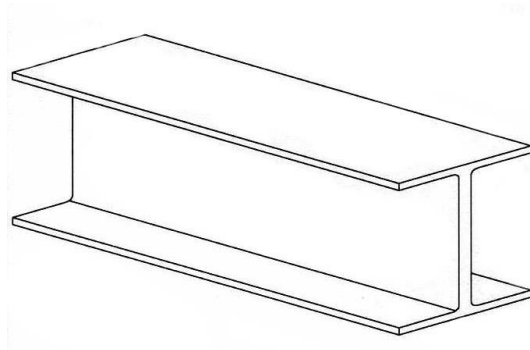
7.3. Porovnání ocelového a kompozitního nosníku

Velkou výhodou kompozitních materiálů oproti tradičním materiálům je jejich nízká hmotnost. Předmětem našeho šetření bude podíl hmotnosti dvou různých nosníků přibližně stejné ohybové tuhosti¹⁷. První nosník bude ocelový (obr. 13) a druhý sendvičový (obr. 12).

¹⁵ Tento pojem je vysvětlen v kapitole 7.1. *Kompozity*.

¹⁶ Častokrát je tvořeno pěnou.

¹⁷ Po stránce ohybové tuhosti si budou dané nosníky na základě dále uvedených rozměrů odpovídat. Tato informace byla zjištěna při konzultaci na ČVUT v Praze.



Obr. 13 - ocelový I profil [4]

Ocelový I profil:

$\rho_{Fe} = 7\,800 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}]$... přibližná hustota oceli

$S_{I_{80}} = 758 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^2]$... obsah průřezu profilu I 80 podle [5]

Sendvičový profil:

$\rho_c = 100 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}]$... hustota jádra¹⁸

Skin bude v našem případě tvořen ocelovými vlákny.

$t = 3 \text{ [mm]}$... tloušťka skinů¹⁹

Oba nosníky mají stejnou šířku, výšku i délku:

$b = 42 \text{ [mm]}$... šířka podle [5]

$h = 80 \text{ [mm]}$... výška podle [5]

$l \text{ [mm]}$... délka

Hmotnost I profilu:

$$m_{I_{80}} = S_{I_{80}} \cdot l \cdot \rho_{Fe} = 758 \cdot 10^{-6} \cdot 7\,800 \cdot l = 5,912\,4 \cdot l \text{ [kg]}$$

¹⁸ Tato hodnota byla poskytnuta na konzultacích na ČVUT v Praze.

¹⁹ Tato hodnota byla poskytnuta na konzultacích na ČVUT v Praze.

Hmotnost sendvičového profilu:

$$m_s = S_{Fe} \cdot \rho_{Fe} \cdot l + S_c \cdot \rho_c \cdot l = (S_{Fe} \cdot \rho_{Fe} + S_c \cdot \rho_c) \cdot l$$

$$m_s = [2tb \cdot \rho_{Fe} + b \cdot (h - 2t) \cdot \rho_c] \cdot l$$

$$m_s = [2 \cdot 3 \cdot 42 \cdot 10^{-6} \cdot 7800 + 42 \cdot (80 - 2 \cdot 3) \cdot 100] \cdot l = 0,311\,052 \cdot l \text{ [kg]}$$

S_{Fe} ... obsah průřezů ocelových desek

S_c ... obsah průřezu jádra

Hmotnostní porovnání obou nosníků:

$$\frac{m_{I80}}{m_s} = \frac{5,912\,4 \cdot l}{0,311\,052 \cdot l} = 19,008$$

Za daných podmínek je sendvičový profil přibližně 19 krát lehčí než ocelový I profil. Ohybová tuhost obou nosníků je přibližně stejná.

8. Závěr

Výsledkem odvozování rovnice řetězovky pomocí rovnováhy sil na infinitezimálním elementu provazu je funkce:

$$f_1: y = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Analýzou funkce f_1 bylo prokázáno, že koeficient a je roven vzdálenosti globálního extrému tzn. vrcholu řetězovky f_1 od osy x . Koeficient a má také vliv na křivost řetězovky.

Globálním extrémem tzn. vrcholem řetězovky f_1 je bod $V = [0; a]$.

Výsledkem odvozování rovnice řetězovky pomocí variačního počtu je funkce:

$$f_2: y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

Vzájemným porovnáváním funkcí f_1 a f_2 bylo zjištěno, že funkce f_1 je obecnou rovnicí řetězovky. Funkce f_2 je případem funkce f_1 pro koeficient $a = 1$. Bylo zavedeno značení:

f_1 – ideální řetězovka

f_2 – obecná řetězovka

Byl odvozen konkávní tvar rovnice řetězovky:

$$f: y = -\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Pro přehlednější grafické znázornění konkávních řetězovek byl do rovnice funkce f přidán koeficient C .

$$C = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{s}{2a}} + e^{-\frac{s}{2a}} \right) \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad ; s \in \mathbb{R}^+ \quad ; s - \text{šířka oblouku}$$

Dosažením členu C do funkce f vznikla nová funkce f_α :

$$f_\alpha: y = -\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{s}{2a}} + e^{-\frac{s}{2a}} \right) \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad ; s \in \mathbb{R}^+ \quad ; s - \text{šířka oblouku}$$

Funkce f_α byla využita pro tvorbu programu PAS - Perfect Arc Solver. Programu, který dokáže po zadání vstupních dat definovat ideální tvar obloukového nosníku pro daný technický problém.

Na základě uvažovaných podmínek z kapitoly 7.3. *Porovnání ocelového a kompozitního nosníku* bylo dokázáno, že sendvičový profil je přibližně 19 krát lehčí než ocelový I profil.

9. Přínos práce

Získal jsem základní představu o metodách matematického modelování a o srovnávání přístupů (fyzikálního a variačního). Model jsem dovedl až do programové realizace.

Získal jsem základní povědomí o složení a mechanických vlastnostech kompozitních materiálů.

10. Použitá literatura

- [1] WANNER, J. *Sbírka vyřešených úloh z technické mechaniky, I. díl, statika, tření a jednoduché stroje*. Praha: Československý kompas, 1948, s. 159-161.
- [2] SOUČEK, V. *9 Variační počet* [online]. [cit 2016-03-1]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/soucek/s3.pdf>, s. 8.
- [3] LAŠ, V. *prezentace (Mechanika kompozitních materiálů)*. ZČU, Plzeň, 2016. Nepublikovaná práce poskytnutá osobně autorem.
- [4] GFK GITTERROSTE. [online]. [cit 2016-03-24]. Dostupné z: <http://www.gfk-gitterroste.de/images/gelaenderiprofil.jpg>
- [5] LEINVEBER, J.; VÁVRA, P. *Strojnické tabulky: pomocná učebnice pro školy technického zaměření*. 3., dopl. vyd. Úvaly: Albra, 2006, s. 293. ISBN 80-7361-033-7.